

FUNKSIYANING QAVARIQLIGI, EGILISH NUQTALARI VA ASIMPTOTALARI. FUNKSIYANI TO‘LA TEKSHIRISH

Adilov Boburjon Baxridin o‘g‘li ¹

¹ Jizzax politexnika instituti p.f.f.d., dotsent v.b.

MAQOLA MALUMOTI

ANNOTATSIYA:

MAQOLA TARIXI:

Received:18.02.2025

Revised: 19.02.2025

Accepted:20.02.2025

Ushbu maqolada funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari. Funksiyani to‘la tekshirish haqida fikr yuritilib, misollar yordamida tushintirib berilgan.

KALIT SO‘ZLAR:

funksiya, asimptota,
nuqta, hosila, grafik.

KIRISH. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo‘lib, $x_1, x_2 \in (a, b)$ uchun $x_1 < x_2$ bo‘lsin.

$f(x)$ funksiya grafigining $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ nuqtalaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni $y = l(x)$ desak, u quyidagicha

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo‘ladi.

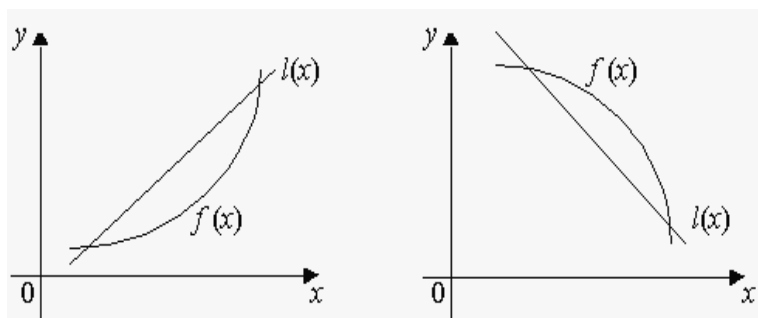
1-ta’rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun $f(x) \leq l(x) (f(x) < l(x))$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq (qat’iy botiq) funksiya deyiladi.

2-ta’rif. Agar har qanday oraliq $(x_1, x_2) \subset (a, b)$ da joylashgan $\forall x \in (x_1, x_2)$ uchun $f(x) \geq l(x) (f(x) > l(x))$

bo‘lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da qavariq (qat’iy qavariq) funksiya deyiladi.

Botiq hamda qavariq funksiyalarning grafiklari 1-chizmada tasvirlangan:



1-chizma.

Aytaylik, $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ bo'lib, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ bo'lsin. Funktsiyaning botiqligi hamda qavariqligini quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

3-ta'rif. Agar

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &\leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &< \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq (qat'iy botiq) deyiladi.

4-ta'rif. Agar

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &\geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &> \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq) deyiladi.

1-misol. Ushbu

$$f(x) = x^2$$

funksiya R da qat'iy botiq funksiya bo'ladi.

Yechish. 3-ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = (\alpha_1 x_1)^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 + (\alpha_2 x_2)^2 < \\ &< \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 (x_1 + x_2)^2 + \alpha_2^2 x_2^2 = \alpha_1 x_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 x_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \end{aligned}$$

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun $f'(x)$ ning (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va etarli.

Zarurligi. $f(x)$ funksiya (a, b) da botiq bo'lsin. U holda $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2, \forall x \in (x_1, x_2)$ uchun

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo'lib, undan

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. $((x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$ deyildi). Keyingi tengsizlikda $x \rightarrow x_1$ so'ng $x \rightarrow x_2$ da limitga o'tib,

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

bo'lishini topamiz. Undan $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $f'(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi.

$f(x)$ funksiya (a, b) da qat'iy botiq bo'lsin. U holda

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

bo'ladi. Lagranj teoremasiga muvofiq

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), x < c_2 < x_2$$

bo'lib, undan $f'(x_1) < f'(x_2)$ bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarlilik. $f'(x)$ funksiya (a, b) da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lsin: $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ da

$$f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad (f'(x_1) < f'(x_2)).$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2.$$

Ravshanki, $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$. Demak, $f'(c_1) \leq f'(c_2)$ ($f'(c_1) < f'(c_2)$) bo'lib, yuqoridagi munosabatlardan

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning (a, b) da botiq (qat'iy botiq) ekanini bildiradi.

Xuddi shunga o'xshash, quyidagi teorema ham isbotlanadi.

2-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, unda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning (a, b) da qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun $f'(x)$ ning (a, b) da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va etarli.

3-teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun (a, b) da

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi hamda funksiyaning monotonligi haqidagi teoremlardan kelib chiqadi.

2-misol. Ushbu

$$f(x) = \ln x \quad (x > 0)$$

funksiya qavariq bo'ladi.

Bu funksiya uchun

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

bo'ladi. 2-teoremaga ko'ra berilgan $f(x) = \ln x$ funksiya $(0, +\infty)$ da qat'iy qavariq bo'ladi.

Funksiyaning egilish nuqtalari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, $x_0 \in X$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$, $\delta > 0$ bo'lsin.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0)$ da botiq (qavariq), $(x_0, x_0 + \delta)$ da qavariq (botiq) bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning *egilish nuqtasi* deyiladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ da $f''(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ da $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$),

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0),$$

bo'lsa, $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi va demak, $f''(x_0) = 0$ bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiya egilish nuqtasida $f''(x) = 0$ bo'ladi.

3-misol. Ushbu $f(x) = x^3$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada egiladi.

Bu funksiya uchun

$$f''(x) = 6x$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\delta, 0) \text{ da } f''(x) &< 0 \\ \forall x \in (0, \delta) \text{ da } f''(x) &> 0 \quad (\delta > 0) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Funksiya grafigining asimtotalari

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, x_0 nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

6-ta'rif. Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi xam cheksiz bo'lsa, $x = x_0$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi deyiladi.

Masalan, $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x = 0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota bo'ladi.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya $(x_0, +\infty)$ da aniqlangan bo'lsin.

7-ta'rif. Agar shunday k va b sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (x \rightarrow +\infty \text{ da } \alpha(x) \rightarrow 0)$$

bo'lsa, $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi deyiladi.

4-teorema. $f(x)$ funksiya grafigi $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo'lishi zarur va etarli.

Zarurligi. $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lsin. Unda

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo'lib, $x \rightarrow +\infty$ da $\alpha(x) \rightarrow 0$ bo'ladi. Bu tenglikni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha x}{x} = k; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b. \end{aligned}$$

Yetarliligi. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

munosabatlar o'rinli bo'lsin. Bu munosabatlardan

$$(f(x) - kx) - b = \alpha(x) \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

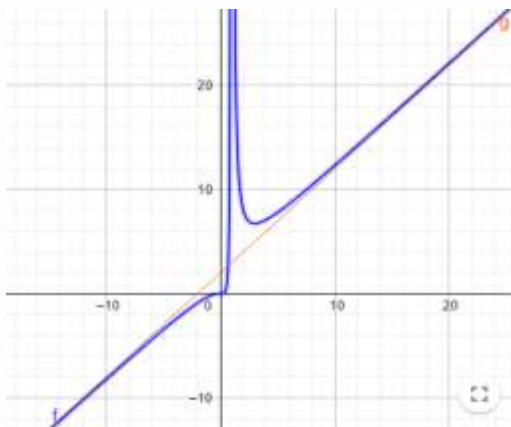
5-misol. $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.

Bu funksiya uchun

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2$$

bo'ladi. Demak, $y = x + 2$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi.



Funksiyani to'la tekshirish va grafigini yasash

$y = f(x)$ funksiyaning ma'lum ketma-ketlikda o'rganish maqsadga muvofiqdir.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
2. Grafikning koordinatalar o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping (agar iloji bo'lsa).
3. Funksiyaning ishorasi o'zgarish oraliqlarini toping ($f(x) > 0$ yoki $f(x) < 0$).
4. Funksiyaning juft, toq yoki juft ham toq ham emas ekanligini aniqlang.
5. Funksiya grafigining asimptotalarini toping.
6. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.
7. Funksiyaning ekstremallarini toping.
8. Funksiya grafigining qavariq oraliqlari va burilish nuqtalarini toping.

6-misol. Ushbu

$y = \frac{1}{x} + 4x^2$ funksiyaning tekshirish va grafigini yasang.

Yechish: 1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $x = 0$ funksiyaning uzulish nuqtasi;

2) funksiyaning koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalarini topamiz:

Ox o'qi bilan $y = 0$, $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, Oy o'qi bilan kesishmaydi.

3) $(-\infty; -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}) \cup (0; +\infty)$ da $y > 0$, $(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0)$ da $y < 0$;

4) $f(-x) = -\frac{1}{x} + 4x^2 \neq f(x) \neq f(-x)$ funksiya juft ham toq ham emas;

5) vertikal asimptota $x = 0$. Og' ma asimptotani topamiz. $y = kx + b$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + 4x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + 4x \right) = \infty$ og' ma asimptota mavjud emas;

7) funksiyaning monoton oraliqlari va ekstremum qiymatlarini topamiz:

$$y' = \left(\frac{1}{x} + 4x^2 \right)' = -\frac{1}{x^2} + 8x = \frac{-1+8x^3}{x^2}; y' = 0 \Rightarrow -1 + 8x^3 = 0 \Rightarrow$$

$x = \frac{1}{2}$ - ekstremum nuqta.

x	$(-\infty; 0)$	$(0; \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}; +\infty)$
y			$y_{min} = 3$	
y'	-	-	0	+

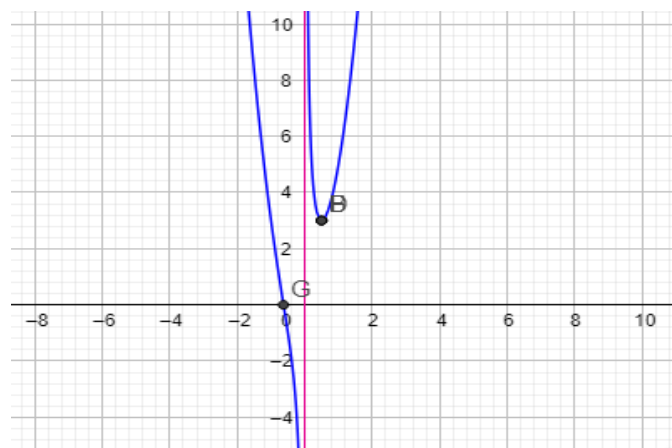
8) Qavariq oraliqlari va bukilish nuqtalarini topamiz:

$$y'' = \left(-\frac{1}{x^2} + 8x \right)' = \frac{2}{x^3} + 8 = \frac{2(4x^3 + 1)}{x^3}; y'' = 0$$

$$\Rightarrow 4x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \text{ - bukilish nuqtasi.}$$

x	$\left(-\infty; -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}; 0\right)$	$(0; +\infty)$
y		$y = 0$		
y''	+	0	-	+

Yuqoridagi topilganlardan foydalanib funksiya grafigini yasaymiz:

**Foydalanilgan adabiyotlar:**

1. O'.Toshmetov, R.M.Turg'unboyev, E.M.Saydamatov, M.Madirimov "Matematik analiz" (1-qism), (179-182b).Toshkent. 2015.
2. Sh.A.Ayupov, M.A.Berdiqulov, R.M.Turg'unboyev "Funksional analiz" .T.2007.
3. Adilov B.B. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti tushunchasi // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti. –6/2024
4. Adilov B.B. O'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari // Namangan davlat universiteti ilmiy axboroti. 4–son 2024y.
5. Bakhridinovich A. B. Theoretical bases of formation of design-design competence of future engineers in the process of higher education. – 2022.
6. Adilov B. ORGANIZATIONAL AND PEDAGOGICAL FOUNDATIONS OF THE FORMATION OF PROJECT-DESIGN COMPETENCE OF STUDENTS OF THE ENGINEERING DIRECTION //Science and innovation. – 2022. – T. 1. – №. B4. – C. 318-322.