

QOVUSHQOQ-ELASTIKLIK NAZARIYASINING ASOSIY REOLOGIK
MODELLARI: KELVIN-FOYGT, MAKSVELL VA BOLTSMAN-VOLTERRA
MEROS NAZARIYASINING QIYOSIY TAHLILI

Xolyigitova Mohigul Naim qizi

Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax, O'zbekiston

E-mail: mohigulxolyigitova@gmail.com

ORCID ID:0009-0003-7481-7144

MAQOLA
MALUMOTI

ANNOTATSIYA:

MAQOLA TARIXI:

Received: 24.07.2026

Revised: 25.07.2026

Accepted: 26.07.2026

KALIT SO'ZLAR:

qovushqoq-elastiklik;
Kelvin-Foygt modeli;
Maksvell modeli;
Boltsman-Volterra
meros nazariyasi;
relaksatsiya; creep;
irsiylik yadrosi

Ushbu maqolada qovushqoq-elastik materiallarning mexanik xatti-harakatini tavsiflovchi uchta asosiy reologik model — Kelvin-Foygt modeli, Maksvell modeli va Boltsman-Volterra meros (irsiylik) nazariyasi — qiyosiy tahlil qilinadi. Tadqiqotning maqsadi ushbu modellarning matematik tuzilishini, fizik ma'nosini, creep (sudralish) va relaksatsiya jarayonlaridagi xatti-harakatini hamda qo'llanish sohalarini tizimli tarzda solishtirishdan iborat. Tadqiqot usuli sifatida analitik-qiyosiy yondashuv qo'llanildi: har bir model uchun konstitutiv tenglama chiqarilib, doimiy kuchlanish va doimiy deformatsiya sharoitlarida tizim javobi tahlil qilindi. Natijalar shuni ko'rsatdiki, Kelvin-Foygt modeli sekin, chegaralangan creep jarayonini tavsiflasa-da, kuchlanish relaksatsiyasini tasvirlay olmaydi; Maksvell modeli, aksincha, aniq eksponensial relaksatsiyani tavsiflaydi, biroq creep jarayonida chegaralanmagan (oqim) deformatsiyani bashorat qiladi. Boltsman-Volterra meros nazariyasi integral operatorlar orqali ikkala xususiy modelni o'z ichiga oluvchi umumiy chizmani taqdim etadi va turli yadro funksiyalari (eksponensial, Abel tipidagi, Rjanitsin yadrosi) orqali real materiallarning xotira effektini moslashuvchan tavsiflash imkonini beradi. Muhokama qismida ushbu modellarning ko'p qatlamli konstruksiyalar, jumladan qovushqoq-elastik to'ldiruvchili silindrik

*qobiqlarda to'liqin tarqalishini modellastirishdagi
amaliy ahamiyati ko'rib chiqiladi. Xulosa qilib,
murakkab muhandislik konstruksiyalarini dinamik
tahlil qilishda meros nazariyasidan foydalanish eng
universal yondashuv ekanligi ta'kidlanadi.*

KIRISH

Zamonaviy muhandislik konstruksiyalarida — polimer kompozitlar, elastomerlar, biologik to'qimalar, damping va izolyatsiya materiallari, shuningdek qovushqoq-elastik to'ldiruvchiga ega qatlamli silindrik qobiqlarda — materialning mexanik javobi na sof elastik, na sof qovushqoq (Nyuton suyuqligiga xos) qonuniyatga bo'ysunadi. Bunday materiallar bir vaqtning o'zida ham energiya saqlash (elastiklik), ham energiya dissipatsiyasi (qovushqoqlik) xususiyatlariga ega bo'lib, ular qovushqoq-elastik (viskoelastik) materiallar deb ataladi. Bunday materiallarning vaqt bo'yicha xotira (irsiylik) xususiyatiga ega bo'lishi ularni tavsiflash uchun maxsus reologik modellarni talab qiladi.

Qovushqoq-elastiklik nazariyasining rivojlanishi 19-asr oxiriga borib taqaladi. Jeyms Klerk Maksvell 1867-yilda gazlarning ichki ishqalanishini tavsiflash jarayonida birinchi bo'lib elastik va qovushqoq elementlarni ketma-ket ulash g'oyasiga asoslangan modelni taklif qildi. Deyarli bir vaqtda Lord Kelvin (Uilyam Tomson) va Voldemar Foygt elastik va qovushqoq elementlarning parallel ulanishiga asoslangan boshqa modelni ishlab chiqdilar, bu model keyinchalik ularning nomi bilan Kelvin–Foygt modeli deb yuritila boshlandi. 1874-yilda Lyudvig Boltsman "elastik izlarning saqlanishi" (elastische Nachwirkung) tushunchasini kiritib, materialning hozirgi holati nafaqat joriy kuchlanishga, balki uning butun oldingi tarixiga bog'liq bo'lishi mumkinligini ko'rsatdi. 20-asr boshida Vito Volterra ushbu g'oyani integral tenglamalar nazariyasi asosida qat'iy matematik shaklga keltirib, funksional-differensial (irsiy) hisob nazariyasini yaratdi — bu yondashuv keyinchalik Boltsman–Volterra meros nazariyasi nomi bilan mustahkam o'rnashdi.[1]

Har uchala model — Kelvin–Foygt, Maksvell va Boltsman–Volterra meros nazariyasi — hozirgi kunda ham qovushqoq-elastik materiallar mexanikasining nazariy poydevorini tashkil etadi. Biroq ular fizik ma'nosi, matematik tuzilishi va amaliy qo'llanish doirasi bo'yicha sezilarli farqlanadi, bu esa muhandislik amaliyotida to'g'ri modelni tanlashni talab qiladigan muhim masala hisoblanadi. Ushbu maqolaning maqsadi — uchala modelning konstitutiv tenglamalarini keltirib chiqarish, ularning creep va relaksatsiya jarayonlaridagi xatti-harakatini tahlil qilish hamda amaliy qo'llanish sohalarini aniqlashtirgan holda qiyosiy baho berishdir.

TADQIQOT USULI

Tadqiqotda analitik-qiyosiy usul qo'llanildi. Har bir reologik model uchun quyidagi bir xil mezonlar bo'yicha tahlil o'tkazildi:

1. Modelning mexanik analogiyasi (elastik va qovushqoq elementlarning ulanish sxemasi);
2. Konstitutiv (bog'lovchi) tenglamaning matematik ko'rinishi;
3. Doimiy kuchlanish qo'llanganda deformatsiyaning vaqt bo'yicha o'zgarishi (kreep funksiyasi);
4. Doimiy deformatsiya berilganda kuchlanishning vaqt bo'yicha o'zgarishi (relaksatsiya funksiyasi);
5. Modelning afzalliklari va cheklovlari. Kelvin–Foygt va Maksvell modellari uchun tenglamalar oddiy differensial tenglamalar apparati asosida, Boltsman–Volterra nazariyasi uchun esa Volterra tipidagi integral operatorlar apparati asosida chiqarildi. Olingan natijalar keyinchalik yagona qiyosiy jadvalda umumlashtirildi (1-jadval).

NATIJALAR

1. Kelvin–Foygt modeli

Kelvin–Foygt modelida elastik element (Guk prujinasi, elastiklik moduli E) va qovushqoq element (Nyuton dempferi, qovushqoqlik koeffitsienti η) parallel ulangan deb qaraladi. Bunday ulanishda ikkala elementga bir xil deformatsiya ta'sir etadi, umumiy kuchlanish esa ularning kuchlanishlari yig'indisiga teng:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \cdot (d\varepsilon/dt)$$

Doimiy kuchlanish σ_0 qo'llanganda (kreep sinovi) tenglamani yechish quyidagi natijani beradi:

$$\varepsilon(t) = (\sigma_0/E) \cdot [1 - e^{(-t/\tau)}], \text{ bunda } \tau = \eta/E$$

Bu ifodadan ko'rinadiki, Kelvin–Foygt modelida deformatsiya boshlang'ich lahzada nolga teng bo'lib, keyin asta-sekin σ_0/E qiymatga intiladi — ya'ni model kechikkan (retardatsiyalangan) elastiklikni tavsiflaydi. Ammo agar doimiy deformatsiya ε_0 berilsa, tenglamadan $\sigma(t) = E \cdot \varepsilon_0$ ($t > 0$ uchun, boshlang'ich lahzada esa cheksiz katta impulsli kuchlanish talab etiladi) kelib chiqadi — ya'ni model kuchlanish relaksatsiyasini umuman tavsiflay olmaydi. Shuning uchun Kelvin–Foygt modeli asosan sekin kreep jarayonlarini, damping va tebranishlarni so'ndirishni tavsiflashda (masalan, biologik to'qimalar, elastomer amortizatorlar) qo'llaniladi.[3]

2. Maksvell modeli

Maksvell modelida xuddi shu elastik va qovushqoq elementlar ketma-ket ulanadi. Bunday holda ikkala elementga bir xil kuchlanish ta'sir etadi, umumiy deformatsiya tezligi esa ularning deformatsiya tezliklari yig'indisiga teng bo'ladi, natijada quyidagi differensial tenglama olinadi:

$$(1/E) \cdot (d\sigma/dt) + \sigma/\eta = d\varepsilon/dt$$

Doimiy deformatsiya ε_0 berilganda (relaksatsiya sinovi) tenglama quyidagi yechimni beradi:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon_0 \cdot e^{(-t/\tau)}, \text{ bunda } \tau = \eta/E$$

Demak, Maksvell modeli kuchlanishning eksponensial qonun bo'yicha nolgacha kamayishini — ya'ni to'liq relaksatsiyani — aniq tavsiflaydi. Biroq doimiy kuchlanish σ_0 qo'llanganda model quyidagi natijani beradi:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0/E + (\sigma_0/\eta) \cdot t$$

Bu ifoda vaqt o'tishi bilan chegaralanmagan tarzda o'sib boruvchi deformatsiyani (viskoz oqimni) bashorat qiladi, bu esa ko'plab qattiq materiallar uchun real fizik hodisaga to'g'ri kelmaydi. Shu sababli Maksvell modeli ko'proq polimer eritmalari, bitum, erigan holatdagi materiallar va kuchlanish relaksatsiyasi muhim bo'lgan jarayonlarni tavsiflashda qo'llaniladi.[4]

3. Boltsman–Volterra meros (irsiylik) nazariyasi

Kelvin–Foygt va Maksvell modellarining har biri faqat cheklangan sondagi parametr (E, η) bilan tavsiflanadigan, ya'ni "xotirasi qisqa" bo'lgan oddiy holatlardir. Ko'pgina real materiallarda esa hozirgi deformatsiya nafaqat joriy kuchlanishga, balki materialning butun oldingi yuklanish tarixiga bog'liq bo'ladi. Boltsman tomonidan ilgari surilgan bu g'oya Volterra tomonidan qat'iy integral tenglamalar shaklida ifodalandi. Kreep holati uchun umumiy konstitutiv munosabat quyidagi ko'rinishga ega:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E + \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau$$

bunda $K(t-\tau)$ — kreep yadrosi (irsiylik yadrosi) bo'lib, materialning "xotira" xususiyatini tavsiflaydi. Xuddi shunga o'xshash, relaksatsiya holati uchun rezolventa yadrosi $R(t-\tau)$ orqali teskari munosabat yoziladi:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t R(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau$$

Yadro funksiyasining ko'rinishiga qarab ushbu umumiy tenglama xususiy holda Kelvin–Foygt yoki Maksvell modellariga aylanadi (mos ravishda K yoki R funksiyasi Dirak delta-funksiyasi yoki oddiy eksponensial funksiyaga aylanganda). Amaliyotda ko'pincha eksponensial yadro (Maksvell tipidagi ko'p elementli zanjir), Abel tipidagi kuchlanish-vaqt yadrosi (kreepning boshlang'ich bosqichini tavsiflash uchun) yoki Yu.N. Rabotnov tomonidan taklif etilgan kasr-eksponensial (Rjanitsin–Rabotnov) yadrosidan foydalaniladi, bu esa keng chastota va vaqt oralig'ida real materiallar xatti-harakatini yuqori aniqlik bilan tavsiflash imkonini beradi.[5]

Uchala modelning asosiy xususiyatlari 1-jadvalda umumlashtirilgan.

1-jadval. Kelvin–Foygt, Maksvell va Boltsman–Volterra modellarining qiyosiy tavsifi

Mezon	Kelvin–Foygt	Maksvell	Boltsman–Volterra
Mexanik sxema	Elastik va qovushqoq element parallel	Elastik va qovushqoq element ketma-ket	Integral (yadroli) umumlashma

Kreep xatti-harakati	Chegaralangan, sekin (eksponensial) o'sish	Chegaralanmagan (chiziqli oqim)	Yadro turiga qarab moslashuvchan
Relaksatsiya xatti-harakati	Tavsiflanmaydi (cheksiz impuls talab etadi)	To'liq eksponensial relaksatsiya	Yadro turiga qarab moslashuvchan
Asosiy qo'llanish sohasi	Damping, biologik to'qima, elastomer amortizatorlar	Polimer eritmalar, bitum, oqim jarayonlari	Ko'p qatlamli konstruksiyalar, qobiqlar, murakkab kompozitlar
Asosiy cheklov	Relaksatsiyani tavsiflay olmaydi	Real qattiq jismlarda cheksiz oqimni bashorat qiladi	Yadro funksiyasini aniqlash tajriba talab qiladi

MUHOKAMA

Yuqoridagi tahlil shuni ko'rsatadiki, Kelvin–Foygt va Maksvell modellari bir-biriga qarama-qarshi, ammo bir-birini to'ldiruvchi xususiyatlarga ega: birinchisi kreepni to'g'ri, relaksatsiyani noto'g'ri; ikkinchisi esa aksincha tavsiflaydi. Bu ikki oddiy model faqat bitta xarakterli vaqt doimiysi ($\tau = \eta/E$) bilan cheklangani sababli, ular real materiallarning keng chastota yoki vaqt diapazonidagi xatti-harakatini to'liq tavsiflay olmaydi. Amaliyotda buni qisman hal qilish uchun ko'plab Kelvin–Foygt yoki Maksvell elementlarini parallel/ketma-ket birlashtirib, umumlashgan ("standart chiziqli qattiq jism", Kelvin–Foygt–Maksvell zanjirlari) modellar quriladi — bu, mohiyatan, Boltsman–Volterra nazariyasidagi yadro funksiyasining diskret yig'indi shaklidagi xususiy holdir.[6]

Boltsman–Volterra meros nazariyasining asosiy afzalligi uning universalligidadir: yadro funksiyasini to'g'ri tanlash orqali istalgan real material xatti-harakatini yetarlicha yuqori aniqlik bilan tavsiflash mumkin. Ayniqsa ko'p qatlamli konstruksiyalarni — masalan, qovushqoq-elastik to'ldiruvchiga ega silindrik qobiqlarni — dinamik yuklanish sharoitida tahlil qilishda, qatlamlarning har xil reologik xususiyatga ega bo'lishi (bir qatlam Kelvin–Foygt tipida, ikkinchisi murakkabroq irsiylik yadrosi bilan tavsiflanishi) meros nazariyasi apparatini qo'llashni taqozo etadi. Bunday yondashuv xos va garmonik to'lqinlarning tarqalish tenglamalarida qovushqoqlikka bog'liq qo'shimcha (kompleks) hadlarning paydo bo'lishiga olib keladi, bu esa to'lqinlarning so'nishi (dissipatsiyasi) va dispersion xarakteristikalarining o'zgarishini izohlaydi.[7]

Shu bilan birga, meros nazariyasining amaliy qo'llanilishidagi asosiy qiyinchilik — yadro funksiyasi parametrlarini aniqlash uchun maxsus kreep yoki relaksatsiya tajribalarini o'tkazish zaruriyatidir. Zamonaviy tadqiqotlarda bu muammoni qisman hal qilish uchun

kasr tartibli hosilalar nazariyasiga asoslangan modellar (masalan, kasr tartibli Kelvin–Foygt yoki Maksvell modellari) faol rivojlantirilmoqda, ular kamroq parametr bilan kengroq chastota diapazonidagi xatti-harakatni tavsiflash imkonini beradi. Bu yo'nalish kelajakdagi tadqiqotlar uchun istiqbolli hisoblanadi.[8]

XULOSA

Ushbu maqolada qovushqoq-elastiklik nazariyasining uchta asosiy reologik modeli — Kelvin–Foygt, Maksvell va Boltsman–Volterra meros nazariyasi — qiyosiy tahlil qilindi. Ko'rsatildiki, oddiy Kelvin–Foygt va Maksvell modellari faqat cheklangan doiradagi jarayonlarni (mos ravishda krep yoki relaksatsiyani) to'g'ri tavsiflaydi, Boltsman–Volterra meros nazariyasi esa integral yadro funksiyasi orqali ikkala xususiy holatni ham o'z ichiga oluvchi umumiy va moslashuvchan matematik apparatni taqdim etadi. Murakkab muhandislik konstruksiyalari, xususan ko'p qatlamli qovushqoq-elastik to'ldiruvchili silindrik qobiqlarda to'lqin tarqalish jarayonlarini aniq modellashtirish uchun meros nazariyasidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Kelajakdagi tadqiqotlarda kasr tartibli hosilalarga asoslangan umumlashgan modellarni ushbu konstruksiyalar uchun qo'llash istiqbolli yo'nalish sifatida qaraladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1955 yil.
2. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. - М.: Высшая школа, 1970 yil.
3. O'rozboyev M.T. Materiallar qarshiligi. —Toshkent.: O'qituvchi nashriyoti, 1965 yil.
4. O'rozboyev M.T. Materiallar qarshiligi asosiy kursi. —Toshkent: O'qituvchi. 1973yil
5. Christensen R.M. Theory of Viscoelasticity. Academic Press, 1982 yil.
6. Jones R.M. Mechanics of Composite Materials. Taylor & Francis, 1999 yil.
7. Safarov, I., Teshaev, M., Marasulov, A., Juraev, T., Rakhmanov, B. "Vibrations of Cylindrical Shell Structures Filled with Layered Viscoelastic Material", E3S Web of Conferences 264, 01027 (2021).
8. Xolyigitova M. N., Suyarov A. O. BIR JINSLI BOLMAGAN DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMASINI “REZONANS” VA “REZONANS” BOLMAGAN HOLLAR UCHUN YECHIMLARINI TUZISH //Экономика и социум. – 2024. – №. 10 (125). – С. 413-416.