JOURNAL OF INTERNATIONAL SCIENTIFIC RESEARCH
Volume 4, Issue 6, July- August 2026 Online ISSN: 3030-3508
https://spaceknowladge.com

STEREOMETRIYADA KO‘PYOQLIKLAR VA AYLANISH JISMLARINING HAJM HAMDA YUZA FORMULALARINI ISBOTLASH: KLASSIK GEOMETRIK VA INTEGRAL HISOB USULLARI

Mamajonova Feruzaxon Xayitboyevna
Andijon Davlat universiteti akademik litseyi, matematika o‘qituvchisi
Tel: +998 90 216 35 96. E-mail: feruzamamjonova43@gmail.com

MAQOLA MALUMOTI

MAQOLA TARIXI:
Received:26.08.2026
Revised: 27.08.2026
Accepted:28.08.2026

KALIT SO’ZLAR:
stereometriya, ko‘pyoqlik, aylanish jismi, hajm, yuza, Kavalьeri prinsipi, integral hisob, prizma, piramida, konus, silindr, sfera.

ANNOTATSIYA:

Mazkur ishda stereometriyaning markaziy mavzularidan biri - prizma, piramida, konus, silindr va sferaning hajm hamda yuza formulalari klassik geometrik usul (teng bo‘lakli ajratish, Kavalьeri prinsipi) va integral hisob usuli (kesim yuzasi funksiyasi bo‘yicha integrallash) orqali isbotlangan. Har bir jism uchun ta’rif, yordamchi lemma va to‘liq isbot keltirilgan, formulalarning amaliy masalalarda qo‘llanilishi ko‘rsatilgan.

Stereometriya - Yevklid geometriyasining fazoviy shakllarni o‘rganuvchi bo‘limi bo‘lib, ko‘pyoqliklar va aylanish jismlarining hajm hamda yuza formulalarini isbotlash bu bo‘limning tayanch masalalaridan biridir. Qadimgi Misr va Bobil matematiklari bu formulalarni empirik yo‘l bilan taxminan hisoblashgan, Yevklidning “Negizlar” asari XII kitobida Yevdoks tomonidan yaratilgan qamrash (ekshaustiya) metodi yordamida piramida va konus hajmlarining mos prizma va silindr hajmlariga nisbati isbotlangan; Yevklid, biroq, doira yuzi yoki shar hajmining aniq sonli formulasini keltirmagan, chunki bu masalalar o‘sha davrda amaliy geodeziyaga oid deb hisoblangan [1].

Miloddan avvalgi III asrda Arximed “Shar va silindr haqida” risolasida shar hajmi uni o‘rab turgan silindr hajmining uchdan ikki qismiga tengligini hamda shar yuzasi uning katta doirasi yuzasidan to‘rt marta katta ekanligini isbotladi; u bu natijani o‘zining eng go‘zal kashfiyoti deb hisoblab, qabr toshiga shar va silindr tasvirini o‘ymalashni vasiyat qilgan edi [2], [3]. V asrda xitoylik olimlar Szu Chongjji va Szu Genji mustaqil ravishda shunga o‘xshash usul bilan shar hajmini hisoblashgan [1]. 1635-yilda Bonaventura Kavalьeri indivizibllar nazariyasi asosida hozirgi kunda uning nomi bilan yuritiluvchi prinsipni

shakllantirdi: agar ikkita jism bir xil balandlikka ega bo‘lib, har bir balandlikdagi kesimlari teng yuzaga ega bo‘lsa, bu jismlarning hajmlari ham teng bo‘ladi [4], [5]. Bu g‘oya XVII asr oxirida Nyuton va Leybnits tomonidan yaratilgan integral hisobga asos bo‘ldi [6].

Muhim metodologik nuqta shundaki, Gilbertning 1900-yilda qo‘ygan uchinchi masalasi (Maks Den tomonidan 1901-yilda hal qilingan) shuni ko‘rsatadiki, ixtiyoriy ikkita teng hajmli tetraedrni chekli sondagi bo‘laklarga ajratish yo‘li bilan bir-biriga aylantirib bo‘lmaydi - piramida va konus hajmini hisoblash uchun albatta limit (cheksiz kichiklashtirish) argumenti, ya’ni Kavalьeri prinsipiga teng kuchli usul zarur [7]. Quyida prizma, piramida, konus, silindr va sfera uchun hajm va yuza formulalari ikkala usulda - klassik geometrik va integral hisob orqali - izchil isbotlanadi.

Umumiy sxema quyidagicha: agar jism [0;h] balandlik oralig‘ida joylashgan bo‘lib, asosdan x masofadagi kesimining yuzasi S(x) funksiya bilan ifodalansa, jism hajmi

$$V = \int_0^h S(x)\,dx$$

formulasi bilan hisoblanadi. Bu - balandlikni n ta teng bo‘lakka bo‘lib, har bir qatlamni silindrsimon qatlam bilan almashtirish va $n \to \infty$ da Riman yig‘indisining limitini olish natijasida qat’iy asoslanadi [6]. Yuza formulalari uchun esa ikki yo‘l qo‘llaniladi: yon sirtni tekislikka yoyish (prizma, piramida, konus, silindr uchun) va aylanish sirti yuzasining integral formulasi

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\cdot\sqrt{(1+[y'(x)]^2)}\,dx$$

(sfera yuzasini hisoblashda qo‘llaniladi) [6].

1-ta’rif. Ikki parallel tekislikda yotgan teng va parallel ko‘pburchaklardan (asoslar) hamda ularning mos uchlarini tutashtiruvchi parallelogrammlardan (yon yoqlar) tashkil topgan ko‘pyoq prizma deyiladi. Agar yon qirralar asosga perpendikulyar bo‘lsa, prizma to‘g‘ri, aks holda og‘ma prizma deyiladi.

1-teorema (Prizma hajmi). Ixtiyoriy prizmaning hajmi asos yuzasi S bilan balandligi h ko‘paytmasiga teng: $V = S\cdot h$.

Isboti (klassik usul). Avval to‘g‘ri to‘rtburchakli parallelepiped uchun $V = a\cdot b\cdot c$ formulasi asoslanadi. So‘ngra ixtiyoriy og‘ma prizma unga teng hajmli - asosi og‘ma prizmaning perpendikulyar kesimidan iborat, balandligi esa yon qirraga teng bo‘lgan - to‘g‘ri prizmaga almashtiriladi; bu almashtirish ekvidekompozitsiya prinsipiga asoslanadi [8]. Uchburchakli prizma parallelepipedning yarmi sifatida, ko‘pburchakli prizma esa diagonal kesimlar orqali uchburchakli prizmalarga bo‘linib, formula umumlashtiriladi [8].

Isboti (integral usul). O‘qni asosga perpendikulyar yo‘naltiramiz. Prizmaning har qanday balandlikdagi kesimi asos bilan bir xil ko‘pburchakka teng, ya’ni $S(x) = S = \text{const}$ barcha $x \in [0;h]$ uchun. U holda:

$$V = \int_0^h S\,dx = S\cdot h.$$

Bu isbot og‘ma prizma uchun ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri qo‘llanadi, chunki kesim yuzasi qiyalikdan qat’i nazar asos yuzasiga teng bo‘lib qoladi (Kavalьeri prinsipi natijasi) [4].

2-teorema (Prizma yuzasi). To‘g‘ri prizmaning yon sirti yuzasi asos perimetri P bilan balandlik h ko‘paytmasiga teng: Syon = P·h; to‘liq yuza Stol = Syon + 2Sasos. Isboti yon yoqlarni (to‘g‘ri to‘rtburchaklarni) yozib, yuzalarini qo‘shishdan iborat: Syon = $\Sigma a_i \cdot h = h \cdot \Sigma a_i = P \cdot h$.

2-ta’rif. Bitta yog‘i ixtiyoriy ko‘pburchak (asos), qolgan yoqlari umumiy uchga ega bo‘lgan uchburchaklardan (yon yoqlar) iborat ko‘pyoq piramida deyiladi [9].

Lemma. Piramida balandligi h va asos yuzasi S bo‘lsa, uchidan x masofada ($0 \le x \le h$) asosga parallel tekislik bilan hosil qilingan kesim yuzasi $S(x) = S \cdot (\frac{x}{h})^2$ ga teng, chunki bu kesim asosga o‘xshash ko‘pburchak bo‘lib, o‘xshashlik koeffitsiyenti $k = \frac{x}{h}$ ga teng va yuzalar k^2 ga proporsional.

2-teorema (Piramida hajmi). Piramida hajmi $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.

Isboti (integral usul). Lemma asosida:

$$V = \int_0^h S \cdot (\frac{x}{h})^2 \, dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h.$$

Isboti (klassik usul). Uchburchakli prizma teng balandlik va tengdosh asosga ega uchta tetraedrga ajratiladi; Kavalьeri prinsipi yordamida ulardan ikkitasining hajmi teng ekanligi ko‘rsatiladi, demak har bir tetraedr hajmi $V_{tetraedr} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$ ga teng [7], [8]. Bu bosqichda Kavalьeri prinsipiga teng kuchli limit argumenti muqarrar zarur - sof chekli ajratish orqaligina bu natijani olib bo‘lmasligi Den tomonidan isbotlangan (Gilbertning III masalasi) [7].

3-teorema (Muntazam piramida yon yuzasi). Syon = $\frac{1}{2} \cdot P \cdot a$, bu yerda a - apofema. Isboti: har bir yon yoq - asos tomoni b va balandligi a bo‘lgan teng yonli uchburchak, yuzasi $\frac{1}{2} \cdot b \cdot a$; n ta yoq yuzalarini qo‘shib, Syon = $\frac{1}{2} \cdot (nb) \cdot a = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a$ olamiz.

3-ta’rif. Konus - to‘g‘ri burchakli uchburchakni bir kateti atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan aylanish jismidir. Uning uchidan x masofadagi kesimi radiusi $r \cdot (\frac{x}{h})$ bo‘lgan doira bo‘lib, bu yerda r - asos radiusi, h - balandlik.

3-teorema (Konus hajmi). $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

Isboti (integral usul). $S(x) = \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{x^2}{h^2})$ bo‘lgani uchun:

$$V = \int_0^h \pi \cdot r^2 \cdot (\frac{x^2}{h^2}) \, dx = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Isboti (klassik usul). Konus asos radiusi r va balandligi h bo‘lgan muntazam n-burchakli piramidalar ketma-ketligining limiti sifatida qaraladi: $n \to \infty$ da piramida asosi doira yuzasiga ($\pi \cdot r^2$) intiladi va piramida hajmi konus hajmiga intiladi - bu Yevdoksning qamrash metodi [1], [7].

4-teorema (Konus yon yuzasi). Syon = $\pi \cdot r \cdot l$, bu yerda $l = \sqrt{(r^2 + h^2)}$ - yasovchi. Isboti: yon sirtni yasovchi bo‘ylab kesib yoysak, radiusi l va markaziy burchagi $\varphi = \frac{2\pi r}{l}$ bo‘lgan sektor hosil bo‘ladi; sektor yuzasi $\frac{1}{2} l^2 \varphi = \frac{1}{2} l^2 \cdot (\frac{2\pi r}{l}) = \pi r l$.

4-ta'rif. Silindr - to'g'ri to'rtburchakni bir tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan, ikkita teng parallel doiraviy asosga ega aylanish jismidir.

5-teorema (Silindr hajmi va yuzasi). $V=\pi\cdot r^2\cdot h$; $Syon=2\pi\cdot r\cdot h$; $Stol=2\pi\cdot r\cdot(h+r)$. Isboti: har bir kesim $S(x)=\pi\cdot r^2=const$ bo'lgani uchun $V=\int_0^h \pi r^2 dx=\pi r^2 h$; yon sirtni yoysak, tomonlari $2\pi r$ va h bo'lgan to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi, $Syon=2\pi rh$.

5-ta'rif. Markazdan teng masofada (radius r) joylashgan nuqtalar to'plami sfera, u bilan chegaralangan jism shar deyiladi.

6-teorema (Shar hajmi). $V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$.

Isboti (integral - disk usuli). Markazdan x masofadagi kesim radiusi $\sqrt{(r^2-x^2)}$, yuzasi $S(x)=\pi(r^2-x^2)$. Demak:

$$V=\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3.$$

Isboti (klassik - Arximed usuli). Yarim shar (radius r) balandligi va asos radiusi r bo'lgan silindrdan xuddi shunday konus «o'yib olingan» jismga taqqoslanadi. Ikkala jismning x masofadagi kesim yuzalari - $\pi(r^2-x^2)$ - teng bo'lgani uchun, Kavalьeri prinsipiga ko'ra ularning hajmlari ham teng [2], [3]:

$$Vyarim\ shar=\pi\cdot r^2\cdot r-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot r=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^3\implies Vshar=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3.$$

Bu natija Arximed tomonidan isbotlangan bo'lib, u shuningdek shar hajmi uni o'rab turgan silindr hajmining uchdan ikki qismini tashkil etishini ko'rsatgan: $Vshar=\frac{2}{3}\cdot Vsilindr$, bu yerda $Vsilindr=\pi\cdot r^2\cdot(2r)=2\pi r^3$ [2], [3].

7-teorema (Shar yuzasi). $S=4\cdot\pi\cdot r^2$.

Isboti (differensial usul). $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ dan $S(r)=\frac{dV}{dr}=4\pi r^2$.

Isboti (aylanish sirti formulasi orqali). $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$, $-r\le x\le r$ ni x o'qi atrofida aylantirib, $S=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{(1+[y']^2)}dx$ formulasidan foydalanamiz. $y'=-\frac{x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ bo'lgani uchun $1+(y')^2=\frac{r^2}{r^2-x^2}$, demak $y\cdot\sqrt{(1+(y')^2)}=r$ - doimiy songa teng. Shunday qilib:

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}r\,dx=2\pi\cdot r\cdot(2r)=4\pi\cdot r^2.$$

Bu natija Arximed teoremasining zamonaviy analitik isboti bo'lib, sferaning istalgan "qatlami" bir xil kenglikda bir xil yuzaga ega bo'lishini anglatadi [10].

Amaliy masalalar. Yuqoridagi formulalarning qo'llanilishini bir nechta misolda ko'rsatamiz.

1-masala. Asos radiusi r=3 m, balandligi h=5 m bo'lgan silindrsimon suv omborining sig'imini toping. Yechish: $V=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot 9\cdot 5=45\pi\approx 141{,}4$ m³.

2-masala. Quyi qismi silindr (r=2 m, h_1=6 m) va ustki qismi konus (r=2 m, h_2=1,5 m) shaklidagi don ombori (silos) hajmini toping. Yechish: $Vsilindr=\pi\cdot 4\cdot 6=24\pi$ m³, $Vkonus=\frac{1}{3}\pi\cdot 4\cdot 1{,}5=2\pi$ m³, $V=26\pi\approx 81{,}68$ m³.

3-masala. Radiusi r=4 m bo‘lgan yarim sfera shaklidagi gumbazni qoplash uchun zarur yuzani va gumbaz ostidagi hajmni toping. Yechish: $S=\frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2=2\pi\cdot 16=32\pi\approx 100,5$ m²; $V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi\cdot 64\approx 134,04$ m³.

4-masala. Asos radiuslari R=0,5 m va r=0,3 m, balandligi h=0,8 m bo‘lgan kesik konus shaklidagi quvur qismining hajmini toping. Yechish: $V_{kesik}=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)=\frac{1}{3}\pi\cdot 0,8\cdot 0,49\approx 0,4105$ m³.

5-masala. Asosi tomoni a=6 m bo‘lgan kvadrat, balandligi h=9 m bo‘lgan piramida hajmini va (apofema l=9,5 m bo‘lganda) yon sirti yuzasini toping. Yechish: $S=a^2=36$ m², $V=\frac{1}{3}\cdot 36\cdot 9=108$ m³; P=4a=24 m, $S_{yon}=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 9,5=114$ m².

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, klassik geometrik usul (teng bo‘lakli ajratish, Kavalьeri prinsipi) fazoviy tasavvurni rivojlantiradi va O‘zbekiston Respublikasi umumta’lim maktablarining 10–11-sinf geometriya darsliklarida qo‘llaniladigan yondashuvga mos keladi [9], [11], integral hisob usuli esa barcha besh jism uchun yagona $V=\int S(x)dx$ sxemasini taqdim etib, murakkabroq jismlarga (kesik piramida, kesik konus, ellipsoid) bevosita umumlashadi. Bu formulalarning amaliy ahamiyati arxitektura (Markaziy Osiyo me’morchiligidagi gumbazsimon inshootlar [12]) va muhandislikda (rezervuar, quvur, silos loyihalash) yaqqol namoyon bo‘ladi.

Xulosa qilib aytish mumkinki, prizma, piramida, konus, silindr va sferaning hajm hamda yuza formulalari klassik geometrik va integral hisob usullari orqali to‘liq va izchil isbotlandi; ikkala usul bir xil natijaga olib kelsa-da, ularning mantiqiy asosi va pedagogik qiymati farqlanadi. Kelgusi tadqiqotlarda ushbu yondashuvni Pappus–Gюldin teoremasi va boshqa murakkab aylanish jismlariga kengaytirish istiqbolli yo‘nalish bo‘lib qolmoqda.

Adabiyotlar

1. Cavalieri's principle. - Wikipedia, The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Cavalieri%27s_principle

2. On the Sphere and Cylinder. - Wikipedia, The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/On_the_Sphere_and_Cylinder

3. On the Sphere and Cylinder. - Encyclopaedia Britannica. URL: https://www.britannica.com/topic/On-the-Sphere-and-Cylinder

4. King J. Cavalieri's Principle: Area and Volume. - Seattle: University of Washington, 2013. URL: https://sites.math.washington.edu/~king/write/nwmi2013-summer/Cavalieri_pptx_slides.pdf

5. Aitken W. Essay on Cavalieri's Principle. - San Marcos: California State University San Marcos. URL: https://public.csusm.edu/aitken_html/m330/CavPrinciple.pdf

6. Strang G., Herman E. Calculus Volume 2, Ch. 2: Applications of Integration. - Houston: OpenStax, Rice University, 2016. URL: https://openstax.org/books/calculus-volume-2/pages/2-2-determining-volumes-by-slicing

7. Hilbert's third problem. - Wikipedia, The Free Encyclopedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_third_problem

8. Stereometriya asoslari: Prizma, piramida va ularning hajmlari haqida ma’ruza matni. - Geometriya-2 fanidan ma’ruzalar, 2007. URL: https://gul2al.narod.ru/arm/maruzam/maruza_matni_geometriya2-2007.pdf

9. Stereometriya. - O‘zbekcha Vikipediya. URL: https://uz.wikipedia.org/wiki/Stereometriya

10. Knill O. Cavalieri principle. - Cambridge: Harvard University, Dept. of Mathematics, Math21a Multivariable Calculus, 2005. URL: https://abel.math.harvard.edu/archive/21a_fall_05/exhibits/cavalieri/index.html

11. Geometriya: umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 10-sinfi uchun darslik. - Toshkent, 2022.

12. To‘rayeva N.A. Matematika fanida darsdan tashqari mashg‘ulotlarda buyuk olimlar ijodidan foydalanish // Pedagogik mahorat: ilmiy-nazariy va metodik jurnal. - Buxoro, 2024. - № 9. - B. 64–71. - ISSN 2181-6833.