ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР НА ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

Х. Ж. Мейлиев [1]
[1] *КарГУ*
Б. М.Х.Жамолов [1]
[1] *магистр Аник Ва Ижтимоий Фанлар Университети*

ИНФОРМАЦИЯ О СТАТЬЕ

АННОТАЦИЯ:

ИСТОРИЯ СТАТЬИ:
Received:02.02.2025
Revised: 03.02.2025
Accepted:04.02.2025

В настоящий работе рассматривается траектории квадратичные стохастический операторы при менделеевском типе наследования двуполой популяции на одно мерным симплексе.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
Понятие квадратичного стохастические оператора, в первые было дано в работе С.Н.Бернштейна

ВВЕДЕНИЕ. Понятие квадратичного стохастические оператора, в первые было дано в работе С.Н.Бернштейна [1], посвященной решению одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама [2], где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекурренций при изучении траекторий инеобходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Улам и его сотрудники провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов.

Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической биологии и других.

Теория квадратичных стохастических операторов развивалась в течение более 90 лет и было опубликовано минного работ.

Квадратичный стохастический оператор (КСО) свободой популяции имеет следующий смысл:

Рассмотрим некоторою биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей 1,2,3,…,n. Шкала разновидностей (признаков, фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей i и j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («Коэффициент наследованности») чериз $P_{ij,k}$.Очевидно что в этом случае выполнены условия:

$$P_{ij,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1, \quad \text{для всех } i,j,k$$

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флюктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$ вероятностей разновидностей. т.е. x_i есть доля разновидности i в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$ родительские пари i и j образуются с вероятностью $x_i x_j$ и, следовательно,

$$x_k' = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j \qquad (1)$$

будет полной вероятностью к среди непосредственных потомков.

Множество $S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n): \ x_i \geq 0, \quad \text{i=1,2,...,n}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ (2)

называется $n-1$ -мерным симплексом и, так как $\sum_{k=1}^{n} x_k^{'} = 1$ и $x_k^{'} \geq 0$, то отображение (2) называется квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс S^{n-1} в себя.

где $P_{ij,k}$ -коэффициент наследованности удовлетворяют условия:

$$P_{ij,k} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1 \quad , \quad \text{i,j,k.} \qquad (3)$$

Среди математических моделей генетики важную роль играют модели, порожденные квадратичными операторами.

Траектория $\{(x^{(t)})\}_{t=0}^{\infty}$, $t = 1,2,\dots$ для $x^{(0)} \in S^{n-1}$под действием КСО (2) определяется следующим образом:

$$x^{(n+1)} = V(x^{(n)}), n = 0,1,2,\dots$$

Одна из основных задач для данного оператора в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Это проблема была полностью решена для вольтеровских КСО которые определяются равенствами (1) - (3) и дополнительным предположением

$$P_{ij,k} = 0, \text{ если } k \,\overline{\in}\, \{i, j\} \quad (4)$$

В настоящий работе мы рассматриваем квадратичные стохастический операторы двуполой популяции на одно мерным симплексе.

Определения. Пусть $F = \{F_1, F_2, F_3 \dots, F_n\}$ –множество женского типа, $M = \{M_1, M_2, M_3 \dots, M_v\}$- множество мужских типа. Состоянием популяции называется пара распределений вероятностей

$x = \{x_1, x_2, x_3 \dots, x_n\}$ – и $y = \{y_1, y_2, y_3 \dots, y_v\}$ – на множествах соответственно F и M.

$$x_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad (5)$$

$$y_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{v} y_i = 1$$

Пространством состояний данной популяции является $S^{n-1} \times S^{v-1}$ декартово произведение (n-1) мерного симплекса S^{n-1} на (v-1) мерной симплекс S^{v-1}.

Дифференциация популяции называется наследственной, если при любом состоянии *(x,y)* в поколении *G* однозначно определено состояние *(x',y')*, возникающее в следующем поколении *G'* путем скрещиваний и отбора.

Отображение $W: S^{n-1} \times S^{v-1} \to S^{n-1} \times S^{v-1}$ отображающие *(n-1)* (v-1)* мерной декартово произведение на себя определяемое равенством

$(x', y') = W(x, y),\ (x, y) \in S^{n-1} \times S^{v-1}$ (6)

называется эволюционным операторам. В координатах оно превращается в систему равенств

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{v,}),$$
$$1 \le i \le n,$$
(7)
$$y_k' = g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_{v,}),$$
$$1 \le k \le v,$$

которые также называется эволюционными. Отображение (7) при любом начальном состоянии (x^0, y^0) однозначно определяет траекторию

$$\{(x^{(t)}, y^{(t)})\}_{t=0}^{\infty} : (x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) = \quad (8)$$
$$W((x^{(t)}, y^{(t)})) = W^{(t+1)}((x^{(0)}, y^{(0)})), \qquad t = 1,2, \dots$$

Множество предельных точек траектории, начинающейся в точке (x^0, y^0), называется ее предельном множеством и обозначается через $\omega(x^0, y^0)$.

Выведем эволюционные уравнения двуполой популяции. Исходными данными для этого являются коэффициенты наследственности $P_{ik,j}^{(f)}, P_{ik,j}^{(m)}$. Величина $P_{ik,j}^{(f)}$ определяется как вероятность рождения потомка женского типа F_j, $1 \le j \le n.$ у матери типа F_j, $1 \le j \le n$, и отца типа M_k, $1 \le k \le v$ Аналогично определяется $P_{ik,j}^{(m)}, 1 \le i \le n, 1 \le k \le v$ очевидно,

$$P_{ik,j}^{(f)} \ge 0, \ \sum_{j=1}^{n} P_{ik,j}^{(f)} = 1$$
(9)

$$P_{ik,j}^{(m)} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{v} P_{ik,j}^{(m)} = 1$$

коэффициенты наследственности суммарно учитывает, например, такие факторы, как рекомбинационный процесс, отбор гамет, мутации, дифференциальная рождаемость.

Пусть (x, y)-состояние в поколении G. $(x^{'}, y')$- возникающее в следующем поколении $G^{'}$ в момент его содержания вероятности типов находятся по формуле полной вероятности:

$$W: \begin{cases} x_j' = \sum_{i,k=1}^{n,v} P_{ik,j}^{(f)} x_i y_k, 1 \leq j \leq n, \\ y_l' = \sum_{i,k=1}^{n,v} P_{ik,l}^{(m)} x_i y_k, 1 \leq l \leq v, \end{cases} \qquad (10)$$

Квадратичный стохастический оператор называется менделеевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют законам Менделя [8], т.е. траектории квадратичный стохастический операторы стабилизуется со второго шага.

Пусть $n=v=2$. Приведём некоторые модели, описываемые квадратичными стохастическими операторами.

1.В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом в 1971 году [8], передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

$P_{\text{AA,A}}^{(f)}$-от женского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A, $P_{\text{aA,A}}^{(f)}$-от женского типа родителя с генотипом aA ребёнку передаётся аллель A, $P_{\text{Aa,A}}^{(f)}$-от женского типа родителя с генотипом Aa ребёнку передаётся аллель A, $P_{\text{AA,A}}^{(f)}$-от женского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A и тогда $P_{\text{..,a}}^{(f)} = 1 - P_{\text{..,A}}^{(f)}$.

$P_{\text{AA,A}}^{(m)}$-от мужского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A, $P_{\text{aA,A}}^{(m)}$-от мужского типа родителя с генотипом aA ребёнку передаётся аллель A, $P_{\text{Aa,A}}^{(m)}$-от мужского типа родителя с генотипом Aa ребёнку передаётся аллель

$A, P^{(m)}_{\mathrm{AA,A}}$-от мужского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A и тогда $P^{(m)}_{..,\mathrm{a}} = 1 - P^{(m)}_{..,\mathrm{A}}$.

Пусть x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1и x_2y_2 частоты генотипов *AA, Aa, aA* и *aa* соответственно. Тогда квадратичный стохастический оператор определяет, как изменяются частоты генотипов от поколения к поколению по формуле (10):

Обозначим для кратности генотипы *AA, Aa, aA* и *aa* через 11, 12, 21, и 22 соответственно.

$$\mathrm{W}: \begin{cases} x'_j = \sum_{i,k=1}^{2} P^{(f)}_{ik,j} x_i y_k, 1 \le j \le n, \\ y'_l = \sum_{i,k=1}^{2} P^{(m)}_{ik,l} x_i y_k, 1 \le l \le v, \end{cases} \quad (11)$$

Или по уширению

$$\mathrm{W}: \begin{cases} x'_1 = P^{(f)}_{11,1}x_1y_1 + P^{(f)}_{12,1}x_1y_2 + P^{(f)}_{21,1}x_2y_1 + P^{(f)}_{22,1}x_2y_2, \\ x'_2 = P^{(f)}_{11,2}x_1y_1 + P^{(f)}_{12,2}x_1y_2 + P^{(f)}_{21,2}x_2y_1 + P^{(f)}_{22,2}x_2y_2, \\ y'_1 = P^{(m)}_{11,1}x_1y_1 + P^{(m)}_{12,1}x_1y_2 + P^{(m)}_{21,1}x_2y_1 + P^{(m)}_{22,1}x_2y_2, \\ y'_2 = P^{(m)}_{11,2}x_1y_1 + P^{(m)}_{12,2}x_1y_2 + P^{(m)}_{21,2}x_2y_1 + P^{(m)}_{22,2}x_2y_2, \end{cases} \quad (12)$$

В соответствии с гипотезой о менделеевском типе наследования вероятности определены следующим образом:

$$\begin{matrix} P^{(f)}_{11,1} = 1 & P^{(f)}_{12,1} = 1 & P^{(f)}_{21,1} = 0 & P^{(f)}_{22,1} = 0 \\ P^{(f)}_{11,2} = 0 & P^{(f)}_{12,2} = 0 & P^{(f)}_{21,2} = 1 & P^{(f)}_{22,2} = 1 \\ P^{(m)}_{11,1} = 1 & P^{(m)}_{12,1} = 0 & P^{(m)}_{21,1} = 1 & P^{(m)}_{22,1} = 0 \\ P^{(m)}_{11,2} = 0 & P^{(m)}_{12,2} = 1 & P^{(m)}_{21,2} = 0 & P^{(m)}_{22,2} = 1 \end{matrix} \quad (13)$$

Подставляя величины (13) в (12), получим

$$\mathrm{W}: \begin{cases} x'_1 = x_1y_1 + x_1y_2, \\ x'_2 = x_2y_1 + x_2y_2, \\ y'_1 = x_1y_1 + x_2y_1, \\ y'_2 = x_1y_2 + x_2y_2, \end{cases}$$

Или от.юда, т.к.$x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 = 1$ окончательно имеем

$$W:\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \\ y_1' = y_1, \\ y_2' = y_2, \end{cases} \qquad (14)$$

Т.е. частоты генотипов неизменяются от поколения к поколению, что составляет первое утверждение в законе Харди-Вайнберга.

Теорема 1.Закон Харди-Вайнберга не изменяются от поколения к поколению справедлив только при менделеевском типе наследования.

Доказательство. Введём следующие обозначения: $P_{AA,A}^{(f)} = a, P_{Aa,A}^{(f)} = b, P_{aA,A}^{(f)} = c, P_{aa,A}^{(f)} = d,$ $P_{AA,A}^{(m)} = a_1, P_{Aa,A}^{(m)} = b_1, P_{aA,A}^{(m)} = c_1, P_{aa,A}^{(m)} = d_1,$ тогда Харди-Вайнберга записывается следующим образом:

$$\begin{cases} x = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y) \\ y = a_1xy + b_1x(1-y) + c_1(1-x)y + d_1(1-x)(1-y) \end{cases}$$

Или $\begin{cases} x = (a-b-c+d)xy + (b-d)x + (c-d)y + d \\ y = (a_1-b_1-c_1+d_1)xy + (b_1-d_1)x + (c_1-d_1)y + d_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a-b-c+d = 0 \\ b-d = 1 \\ c-d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1-b_1-c_1+d_1 = 0 \\ b_1-d_1 = 0 \\ c_1-d_1 = 1 \\ d_1 = 0 \end{cases}$$

Решив эту системы, получим *a=1,b=1 c=0,d=0,* $a_1=1, b_1=0,$ $c_1=1, d_1=0,$ откуда и следует утверждение теорема.

2.При менделеевском типе наследования квадратичный стохастической операторы $\{P_{ij,k}^{(f)}\}_{i,j,k=1}^2, \{P_{ij,k}^{(m)}\}_{i,j,k=1}^2$ определяется следующим образом:

$$\begin{gathered} P_{11,1}^{(f)} = 1 \;\; P_{12,1}^{(f)} = 1/2 \;\; P_{21,1}^{(f)} = 1/2 \;\; P_{22,1}^{(f)} = 0 \\ P_{11,2}^{(f)} = 0 \;\; P_{12,2}^{(f)} = 1/2 \;\; P_{21,2}^{(f)} = 1/2 \;\; P_{22,2}^{(f)} = 1 \\ P_{11,1}^{(m)} = 1 \;\; P_{12,1}^{(m)} = 1/2 \;\; P_{21,1}^{(m)} = 1/2 \;\; P_{22,1}^{(m)} = 0 \\ P_{11,2}^{(m)} = 0 \;\; P_{12,2}^{(m)} = 1/2 \;\; P_{21,2}^{(m)} = 1/2 \;\; P_{22,2}^{(m)} = 1 \end{gathered} \qquad (15)$$

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются найдипо формуле (12). Подставляя в (12) выше указанные вероятности, получим

$$W:\begin{cases} x_1' = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1, \\ x_2' = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2, \\ y_1' = x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1, \\ y_2' = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + x_2y_2, \end{cases}$$

Или окончательно

$$W:\begin{cases} x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ x_2' = \frac{1}{2}(x_2 + y_2), \\ y_1' = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ y_2' = \frac{1}{2}(x_2 + y_2), \end{cases} \quad (16)$$

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (16) необходимо подставить x_1', x_2', y_1'и y_2' т.т. в место $x_1, x_2 y_1$ и y_2 соответственно, т. е. получим уравнения

$$W:\begin{cases} x_1'' = \frac{1}{2}(x_1' + y_1'), \\ x_2'' = \frac{1}{2}(x_2' + y_2'), \\ y_1'' = \frac{1}{2}(x_1' + y_1'), \\ y_2'' = \frac{1}{2}(x_2' + y_2'), \end{cases} \quad (17)$$

Или, подставляя в (17) выражения (16), окончательно имеем

$$\text{W:}\begin{cases} x_1'' = \dfrac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ x_2'' = \dfrac{1}{2}(x_2 + y_2), \\ y_1'' = \dfrac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ y_2'' = \dfrac{1}{2}(x_2 + y_2), \end{cases} \qquad (18)$$

откуда следует, что частоты генотипов во всех последующих поколениях будут такими же, как в первом поколении. Сформулируем это свойство в виде следующего теорема.

Теорема 2.Устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение.

Это теорема есть третье утверждение закона Харди-Вайнберга, правда, чуть в общем виде.

Из (16) видно что прообраз ((1;0),(0;1)) и ((0;1),(1;,0)) пуст, откуда следует, что оператор не является сюръективным отображением.

Таким образом мы доказали следившие теорема:

Теорема 3. Квадратичные операторы определенные выше, менделевские при $v = 2$, $n = 2$ и не является сюрьективным.

Менделевость оператора эквивалента тому, что, начиная со второго, шага, последовательность $x^{(k+1)}$ стабилизируется.

Литературы:

1.Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. квфедр. Украины, отд.матем.,1924,вып.Ic 83-115.,

2.Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.

3.Ганиходжаев Р.Н. Карта неподвижных точек функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем//Мат. Заметки.-1994.-56.-С.1125-1131.

4.Ганиходжаев Н.Н.,Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных оператров.//ДАН РУз, 1997.

5.LyubichYa.I. Mathematical structures in populationgenettes//Biomathematics -1992. 22//.

6.У.А.Розиков, У.У. Жамилов. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции.//Укр.мат.жур.,2001.м 63.№7//

7.Розиков У.А.Жамилов У.У.О динамике строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе.//Мат.сб.-2009.-200,№9.-с.81-94.

8.Генетика и наследственность.//Сб.статей. М.,1987.300 с.