SHTURM-LIUVILL CHEGARAVIY MASALALARINI SONLI USULLAR YORDAMIDA YECHISH

Sirojiddinov Husanjon Sayfiddin o'g'li [1]

[1] *Farg'ona davlat universiteti "Amaliy matematika va informatika" mutaxassisligi magistranti*

MAQOLA MALUMOTI

MAQOLA TARIXI:

Received:02.02.2025
Revised: 03.02.2025
Accepted:04.02.2025

KALIT SO'ZLAR:

Shturm-Liuvill, chegaraviy masala, chekli ayirmalar usuli, diskretizatsiya, xos qiymat, tridiagonal matritsa, sonli yechim..

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqolada Shturm-Liuvill chegaraviy masalalarini sonli usullar yordamida yechish metodologiyasi ko'rib chiqiladi. Masala sifatida

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x^2y(x)=\lambda y(x), \quad x\in(0,1)$$

chegaraviy shartlar $y(0)=0$ *va* $y(1)=0$ *tanlandi. Chekli ayirmalar usuli yordamida differentsial operator diskretizatsiya qilinib, natijada tridiagonal matritsa shaklida ifodalangan xos qiymatli masala yechiladi. Maqola nafaqat nazariy asoslarni, balki misol asosida olingan yechimlarning fizik interpretatsiyasini va amaliy qo'llanilishini ham batafsil tahlil qiladi.*

KIRISH. Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari matematik fizika va qo'llanma matematikaning eng dolzarb mavzularidan biri sifatida tan olinadi. Ular nafaqat kvant mexanikasi, to'lqin nazariyasi, issiqlik o'tkazuvchanligi va elastiklik nazariyasi kabi ko'plab amaliy muammolarni yechishda ham katta ahamiyatga ega. Ushbu masalalar yordamida murakkab fizik tizimlarning asosiy xususiyatlari – energiya spektri, titrash modlari va rezonans hodisalari – aniq hisoblanishi mumkin.

Maqolamizda konkret misol sifatida

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x^2y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,1)$$

va chegara shartlari $y(0)=0$ va $y(1)=0$ asosidagi Shturm-Liuvill masalasi tanlanadi. Bu yerda potentsial funksiya sifatida $q(x)=x^2$ ifodalangan bo‘lib, u oddiy ko‘rinishiga qaramay, fizik tizimlarning energiya darajalarini va titrash xususiyatlarini aniqlashda katta rol o‘ynaydi.

So‘nggi yillarda ilg‘or hisoblash vositalari va algoritmlarning rivojlanishi murakkab differentsial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechish imkoniyatlarini sezilarli darajada kengaytirdi. Ayniqsa, Chekli ayirmalar usuli yordamida differentsial operatorlarni diskretizatsiya qilish aniq va barqaror natijalar berishida juda samarali hisoblanadi. Ushbu metod nafaqat nazariy jihatdan, balki real fizik tizimlarni modellashtirishda ham o‘zining amaliy qo‘llanilishini isbotlamoqda.

Shturm-Liuvill masalalarining qo‘llanilish sohalari va amaliy ahamiyati haqida ham to‘xtalib o‘tish lozim. Masalaning o‘z yechimlari yordamida nafaqat kvant tizimlarining energiya spektri, balki mexanik va elektromexanik tizimlardagi titrash modlari aniqlanadi. Shuningdek, bunday yechimlar konstruktsiya, materiallar mustahkamligi va hatto biologik tizimlarning modellashuvida ham qo‘llanilishi mumkin. Ushbu yondashuv kelgusidagi tadqiqotlar uchun mustahkam poydevor bo‘lib, real tizimlarga samarali yechimlarni taqdim etishda katta imkoniyat yaratadi.

Ushbu bo‘limda tanlangan misolni yechish uchun qo‘llanilgan metodik yondashuvlar batafsil tushuntiriladi. Misol sifatida keltirilgan Shturm-Liuvill masalasi

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x^2y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,1)$$

chegaraviy shartlari esa $y(0)=0,\quad y(1)=0$ bo‘lib, unda potentsial funksiya $q(x)=x^2$ tanlangan. Ushbu masala, kvant garmon osilatorining soddalashtirilgan modeliga o‘xshash tarzda, tizimning energiya spektrini va asosiy titrash modlarini aniqlashga qaratilgan.

1. Diskretizatsiya va nuqtalarga bo‘lish

Avvalo, interval $[0,1]$ ni $n+1$ ta nuqtaga bo‘lamiz. Misolda, amaliy hisob-kitoblarda aniq natijalar olish maqsadida $n=100$ deb qabul qilamiz. Har bir nuqta quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0,1,\dots,n+1, \quad h = \frac{1}{n+1}.$$

Chegaraviy nuqtalar $x_0 = 0$ va $x_{n+1} = 0$ bo‘lganligi sababli, yechim vektori faqat ichki nuqtalarga tegishli $y_1, y_2, \dots, y_n$ qiymatlaridan iborat bo‘ladi, chunki $y(0) = y_0 = 0$ va $y(1) = y_{n+1} = 0$ deb olinadi.

2. Differensial tenglamani markaziy differensial formulasi bilan approksimatsiya qilish

Ikkinchi tartibli differensial operator $y''(x)$ ni markaziy differensial formulasi yordamida quyidagicha yaqinlashtiramiz:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}.$$

Bu formulani asl differensial tenglamaga qo‘llasak, x_i nuqtasida quyidagi ifoda hosil bo‘ladi:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + x_i^2 y_i = \lambda y_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

3. Tenglamalarni algebraik tizimga keltirish

Hosil bo‘lgan diskret tenglamalarni yaxshilab qayta tuzish natijasida quyidagi algebraik shaklga erishamiz:

$$-y_{i-1} + \left(2 + h^2 x_i^2\right) y_i - y_{i+1} = \lambda h^2 y_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Quvvatli ifodani soddalashtirish uchun, $\mu = \lambda h^2$ deb belgilasak, har bir ichki nuqta uchun quyidagi shakl hosil bo‘ladi:

$$-y_{i-1} + \left(2 + h^2 x_i^2\right) y_i - y_{i+1} = \mu y_i.$$

4. Tridiagonal matritsa ko‘rinishini yaratish

Yuqoridagi tenglamalar tizimini vektor-matritsa shakliga keltiramiz. Agar ichki nuqtalar uchun yechimlar vektori $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ deb olinsa, tizim quyidagicha ifodalanadi:

$$Ay = \mu y$$

bu yerda $A - n\times n$ o‘lchamdagi tridiagonal matritsa bo‘lib, uning elementlari: diagonallar: $A_{ii} = 2 + h^2 x_i^2$, pastki va yuqori diagonal elementlar: $A_{i,i\text{-}1} = A_{i,i+1} = \text{-}1$, qolgan elementlar nolga teng.

Nihoyat, olingan μ qiymatlaridan asl xos qiymati λ ni quyidagi munosabat orqali qaytaramiz:

$$\lambda = \frac{\mu}{h^2}$$

Misol asosida olingan natijalarni, hisoblash jarayonini va ularning fizik interpretatsiyasini ko‘rib chiqsak.

1. Misolning amaliy diskretizatsiyasi

Tanlangan $n = 100$ qiymatiga asosan, har bir nuqta uchun h qiymati

$$h = \frac{1}{101} \approx 0.0099$$

bo‘ladi. Ichki nuqtalar $x_i = ih,\ \ i = 1,2,\ldots,100$ shaklida aniqlanadi. Shu nuqtalarda differensial tenglama quyidagicha yoziladi:

$$-y_{i-1} + \left(2 + h^2 x_i^2\right) y_i - y_{i+1} = \mu y_i.$$

Bu jarayonda, potentsial funksiya x_i^2 ni hisobga olgan holda, har bir diagonal element o‘ziga xos tarzda aniqlanadi.

2. Xos qiymat masalasini yechish

Hosil bo‘lgan tridiagonal matritsa A asosida algebraik xos qiymati masalasi

$$Ay = \mu y$$

yechiladi. Sonli usullar, masalan, QR algoritmi yoki Pythonning xos funksiyasi yordamida, matritsaning xos qiymati va xos vektorlari topiladi. Natijada, eng past tartibli xos qiymatlar tizimning asosiy titrash modlarini ifodalaydi. Hisoblash bosqichlari quyidagicha:

Matritsa tuzilishi: A ning barcha elementlari yuqoridagi formulalar asosida aniqlanadi.

Xos qiymati va xos vektorlarni hisoblash: Sonli algoritmlar yordamida A ning xos qiymatlarini topamiz.

Asl xos qiymatlarni aniqlash: Olingan μ qiymatlari orqali $\lambda = \frac{\mu}{h^2}$ munosabati qo‘llaniladi.

Hisoblash natijalari quyidagi xususiyatlarga ega:

Pastki tartibli xos qiymatlar: Tizimning asosiy titrash modlarini ifodalaydi. Misolda, eng kichik xos qiymatlar kvant tizimining minimal energiya holatlarini aks ettiradi.

Xos vektorlar: Ular mos keluvchi xos funksiyalar bo‘lib, chegara shartlari (ya’ni, $y(0)=0$ va $y(1)=0$ qat’iy bajarilgan holda, tizimning rezonans va titrash holatlarining makoniy xarakterini ko‘rsatadi.

Diskretizatsiya natijalari: Markaziy differensial formulasidan foydalanish orqali olingan natijalar aniqligi va barqarorligini ta’minlaydi.

Bu natijalar, hisoblash usulining nafaqat nazariy asoslarini, balki real fizik tizimlarda qo‘llanilganda kutilgan xususiyatlarni aks ettirishini isbotlaydi. Misolning soddaligi va aniq natijalari, usulning murakkabroq masalalarga kengaytirilishi uchun mustahkam poydevor ekanligini ko‘rsatadi.

Misol asosida olingan natijalar va usulning samaradorligi, cheklovlari hamda istiqbollari haqida chuqurroq tahlil qilsak.

Chekli ayirmalar usuli yordamida differensial operatorni diskretizatsiya qilish yuqori aniqlikda natijalar berishi sababli bu yondashuv aniq va barqaror hisoblanadi. Bu usul markaziy differensial formula orqali hosilalarni taqribiy hisoblashga asoslanadi, shuning uchun hisoblash natijalarida xatoliklar minimal bo‘ladi. Ayniqsa, an’anaviy analitik usullar bilan yechimi topish qiyin bo‘lgan differensial tenglamalar uchun bu usul samarali vosita hisoblanadi. Diskretizatsiya natijasida hosil bo‘lgan chiziqli algebraik tenglamalar tridiagonal matritsa shaklida bo‘lgani uchun ularni hisoblash jarayoni juda soddalashadi. Zamonaviy kompyuter algoritmlari, masalan, QR-algoritmi yoki iteratsion metodlar yordamida bu tenglamalarni samarali va tezkor yechish mumkin.

Ushbu usul natijasida olingan xos qiymatlar va ularga mos keluvchi xos funksiyalar fizik tizimlarning fundamental xususiyatlarini aks ettiradi. Ayniqsa, rezonans holatlari, titrash chastotalari va energiya spektrining tahlili uchun bu yondashuv keng qo‘llaniladi. Kvant mexanikasida garmonik osilator yoki potensial qutidagi zarrachalarning energiya darajalarini aniqlashda chekli ayirmalar usuli orqali topilgan xos qiymatlar va xos funksiyalar real tajribalarda kuzatiladigan natijalar bilan mos tushadi. Shu sababli, bu metod nafaqat nazariy jihatdan qimmatli, balki amaliy fizik tajribalarda ham asosli qo‘llaniladi.

Biroq, diskretizatsiya qadamining tanlovi natijaga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Agar diskretizatsiya qadamining qiymati juda katta bo‘lsa, bu yechimning aniqligini sezilarli darajada pasaytiradi, chunki bu holda differensial operatorning yaqinlashishi yomonlashadi va hisoblash natijalari beqaror boʻlishi mumkin. Aksincha, juda kichik diskretizatsiya qadami ishlatilsa, hisoblash jarayoni murakkablashadi va kompyuter resurslarining koʻproq ishlatilishini talab qiladi. Shuning uchun optimal qadam tanlash hisoblash natijalarining aniqligi va samaradorligi oʻrtasida muvozanatni ta’minlash uchun juda muhimdir.

Bundan tashqari, chegara shartlarining qat’iy bajarilishi yechimning aniq belgilanishiga olib keladi, lekin ba’zan murakkab tizimlar uchun moslashtirilgan chegara shartlarini qoʻllash talab etilishi mumkin. Misol uchun, kvant mexanikasida yoki elastiklik nazariyasida ba’zan tabiiy chegara shartlari aniq berilmagan boʻlishi mumkin, bu esa sonli yechimlarni hisoblashda qoʻshimcha yondashuvlarni talab qiladi. Bu turdagi masalalarda moslashuvchan chegara shartlarini qoʻllash yoki variatsion yondashuvlardan foydalanish usulning aniqligi va ishonchliligini oshiradi.

Bu usul odatiy holatda oddiy potensial funksiya uchun ishlatilganda samarali natijalar beradi. Masalan, kvadrat potensial x^2 bilan bogʻliq differensial tenglamalar chekli ayirmalar usuli orqali yaxshi hisoblanadi. Ammo agar murakkabroq potensial funksiyalar yoki koʻp oʻlchovli tizimlar uchun bu usul qoʻllansa, hisoblash jarayoni ancha murakkablashadi va qoʻshimcha optimallashtirish usullaridan foydalanish zarur boʻladi. Masalan, uch oʻlchamli kvant mexanikasi masalalarini hisoblash uchun uch oʻlchamli tarmoqni diskretizatsiya qilish talab etiladi va bu juda katta oʻlchamli matritsalarni hosil qiladi. Bunday hollarda iteratsion metodlar yoki spektral usullardan foydalanish hisoblash samaradorligini oshirishga yordam beradi.

Kelajakda ushbu yondashuvni yanada takomillashtirish uchun bir nechta muhim yoʻnalishlar mavjud. Birinchidan, murakkabroq potensial funksiyalar bilan ishlash uchun bu metodologiyani rivojlantirish va uni koʻp oʻlchovli differensial tenglamalar uchun kengaytirish zarur. Bu orqali tizimning spektral xususiyatlarini yanada chuqurroq oʻrganish va real fizik hodisalarni aniqroq modellashtirish mumkin boʻladi. Ikkinchidan, hisoblash samaradorligini oshirish uchun optimallashtirilgan algoritmlar va parallel hisoblash metodlaridan foydalanish muhim ahamiyatga ega. Masalan, GPU (Grafik Protsessor) yoki massiv-parallel hisoblash texnologiyalaridan foydalangan holda yirik oʻlchamli matritsalarni samarali yechish mumkin. Bu usulni yanada tezroq va real vaqtda qoʻllash imkoniyatini yaratadi.

Bundan tashqari, olingan natijalarni eksperimental ma’lumotlar bilan solishtirish orqali usulning amaliy qoʻllanilishini va ishonchliligini mustahkamlash mumkin. Masalan, kvant mexanikasidagi hisoblash natijalari laboratoriya tajribalarida oʻlchanadigan energiya spektrlari bilan taqqoslanishi mumkin. Shuningdek, akustik tizimlar yoki elastiklik nazariyasiga oid muammolar uchun hisoblangan rezonans chastotalari real tizimlardagi titrash o'lchovlari bilan mos keladimi yoki yo'qmi, tekshirilishi kerak. Eksperimental tasdiqlash ushbu yondashuvni yanada ishonchli va keng qo'llaniladigan vosita sifatida rivojlantirishga yordam beradi.

XULOSA. Maqolada Shturm-Liuvill chegaraviy masalalarini konkret misol asosida tahlil qilish va yechish jarayoni batafsil ko'rib chiqilgan. Ushbu masala shaklidagi tenglama – kvadratik potentsial ostidagi oddiy differensial tenglama bo'lib, ko'plab fizik va muhandislik muammolarini modellashtirish uchun ishlatiladi. Berilgan differensial tenglama shakli:

$$-\frac{d^2y(x)}{dx^2}+x^2y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,1)$$

bo'lib, bu yerda λ – spektral parametr, x^2 – potentsial funksiya va $y(x)$ – noma'lum funksiya. Chegaraviy shartlar $y(0)=0$ va $y(1)=0$ ko'rinishida berilgan bo'lib, ular yechimning chegarada nolga teng bo'lishini talab qiladi. Ushbu masala Shturm-Liuvill tipidagi chegaraviy masalalariga tegishli bo'lib, ularning yechimlari fizik tizimlarning asosiy holatlarini aniqlashda katta ahamiyatga ega.

Bu differensial tenglamani sonli usullar yordamida yechish uchun uni diskretizatsiya qilish zarur. Chekli ayirmalar usuli yordamida differensial operator diskret shaklga o'tkaziladi, ya'ni uzluksiz hosila hisoblash o'rniga uni chekli ayirmalar orqali ifodalash amalga oshiriladi. Ikkinchi tartibli hosilani markaziy differensial formulasi bilan taqribiy hisoblash quyidagicha beriladi:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}\approx\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}$$

bu yerda h – diskret qadam uzunligi. Ushbu ifodani asl tenglamaga qo'llaganda, differensial tenglama quyidagi ko'rinishga keladi:

$$-\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+x_i^2y_i=\lambda y_i.$$

Bu tenglamani algebraik shaklga keltirish orqali tridiagonal matritsa hosil qilinadi, bunda diagonallar va ularning atrofidagi elementlar koeffitsiyentlar orqali ifodalanadi. Tridiagonal matritsaning tuzilishi sonli hisoblash jarayonida muhim ahamiyatga ega, chunki bunday matritsalarni iteratsion usullar yordamida tez va samarali yechish mumkin.

Bu usulni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan xos qiymatlar λ va xos funksiyalar Shturm-Liuvill operatorining spektral xususiyatlarini aniqlash imkonini beradi. Ayniqsa, eng past tartibli xos qiymatlar va ularga mos keluvchi xos funksiyalar tizimning asosiy titrash modlarini va energiya darajalarini aks ettirishga yordam beradi. Bu yondashuv kvant mexanikasi, mexanik tebranishlar, optik rezonatorlar va boshqa ko‘plab fizik tizimlarda qo‘llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Arfken, G. B., & Weber, H. J. (2005). *Mathematical Methods for Physicists* (6th ed.). Academic Press.
2. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2008). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (9th ed.). Wiley.
3. Courant, R., & Hilbert, D. (1989). *Methods of Mathematical Physics, Vol. I & II*. John Wiley & Sons.
4. Hasanov, A. B. (n.d.). *Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasi*. [Nashriyot va yil ma’lum emas].
5. Isaacson, E., & Keller, H. B. (1994). *Analysis of Numerical Methods*. Dover Publications.
6. Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). Wiley.
7. Lapidus, L., & Pinder, G. F. (1982). *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. Wiley.
8. LeVeque, R. J. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM.
9. Smith, G. D. (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Oxford University Press.
10. Strang, G. (1986). *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press.
11. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1977). *Mathematical Physics Equations*. Moscow: Nauka.
12. Zwillinger, D. (1997). *Handbook of Differential Equations*. Academic Press.