TUB SONLAR VA ARIFMETIKANING ASOSIY QONUNI ISBOTI

Toshtemirova Sarvara To'lqin qizi [1]
[1] toshtemirova005@gmail.com
Jo'rayeva Sevinch Yodgorbek qizi [1]
[1] jorayevasevinch179@gmail.com
Buvajonova Sevinch Buvajon Qizi [1]
[1] sevinchbuvajonova52@gmail.com

MAQOLA MALUMOTI

MAQOLA TARIXI:
Received:26.06.2025
Revised: 27.06.2025
Accepted:28.06.2025

KALIT SO'ZLAR:
Tub son, murakkab son, arifmetika, arifmetikaning asosiy teoremasi, Tub sonlar ko'paytmasi, EKUB

ANNOTATSIYA:

Ushbu maqolada tub sonlar, tub sonlarning cheksizligi va arifmetikaning asosiy qonuni haqida yozilgan. Maqola tub sonlarning ta'rifi va xossalarini aniqlab berib, arifmetikaning asosiy teoremasi — bayon etadi. Asosiy e'tibor har qanday n >1 natural sonni tub sonlarning ko'paytmasi sifatida ifodalash va bu ifodalanishning yagona ekanligini dalillar bilan ko'rsatishga qaratilgan.

KIRISH. **Ta'rif.** O'zidan va birdan boshqa bo'luvchilari bo'lmagan, birdan katta natural son tub son deyiladi. Natural bo'luvchilari soni ikkitadan ortiq bo'lgan birdan farqli natural songa murakkab son deyiladi.

Teorema-1. Agar $a(>1)$ butun sonning birdan katta bo'lgan bo'luvchilari ichida eng kichigi p bo'lsa, u holda p tub sondir.

Isbot. Haqiqatdan, agar $d \in$ N soni p ning bo'luvchisi bo'lib, $1 < d < p$ bo'lsa, u holda d soni a ning ham bo'luvchisi bo'ladi. Bu esa p ning eng kichik bo'luvchi ekanligiga zid. Demak, d =1 yoki $d = p$ bo'ladi, ya'ni p – tub son.

Teorema-2. Har qanday a son va a tub son uchun $(a,p) =1$ yoki $p|a$.

Isbot. p tub sonning bo'luvchilari 1 va$p$ bo'lganligi uchun a va p sonlari umumiy bo'luvchilari 1 yoki p bo'ladi. Agar, p soni ularning umumiy bo'luvchisi bo'lsa, $p|a$ bo'ladi, aks holda $(a,p) =1$.

Teorema-3. Agar $a{\cdot}b$ ko'paytma biror p tub songa bo'linsa, bu ko'paytuvchilardan kamida bittasi shu tub songa bo'linadi, ya'ni $p \,|a \cdot b$ bo'lsa, u holda $p \mid a$ yoki $p \mid b$.

Isbot. Haqiqatan, agar a soni p ga bo'linmasa, (a, b) =1 bo'lib, $p \mid a \cdot b$ ekanligidan $p \mid b$ kelib chiqadi.

Teorema-4. Tub sonlar soni cheksiz ko'pdir.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni tub sonlar cheklita bo'lib, ular $p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n$ bo'lsin. Ushbu $a = p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n + 1$ sonni qaraymiz. a soni $p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n$ tub sonlarning hech biriga bo'linmaydi. Agar a tub son bo'lsa, demak, u berilgan $p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n$ tub sonlardan farqli tub son bo'ladi. Agar a tub son bo'lmasa, bu son $p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n$ tub sonlardan farqli boshqa bir tub songa bo'linadi. Demak, xar ikkala holda ham $p_1,\cdot p_2,\cdot \dots \cdot p_n$ tub sonlardan farqli bo'lgan tub son topiladi. Bu farazimizga ziddir.

Endi arifmetikaning asosiy teoremasi deb yuritiladigan quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema-5. Xar qanday birdan katta butun son tub sonlarning ko'paytmasi shaklida yoziladi va ko'paytma ko'paytuvchilarning yozilish tartibi aniqligida yagonadir.

Isbot. Isbotni matematik induksiya metodi yordamida ko'rsatamiz. $a = 2$ tub son bo'lganligi uchun teorema sharti o'rinli. Aytaylik, $a > 2$bo'lsin. Agar a tub son bo'lsa, teorema sharti o'rinli. Agar a tub son bo'lmasa, shunday p_1 tub son mavjudki, $p_1|a$ ya'ni $a = p_1 a_1$bo'ladi. Matematik induksiya faraziga asosan, a_1 soni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalanadi, ya'ni $a_1 = p_2 \cdot \dots \cdot p_n$,

demak

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

yoyilmani hosil qilamiz.

Endi yoyilmaning yagonaligini ko'rsatamiz. Buning uchun teskarisini faraz qilamiz, ya'ni a son boshqa

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$$

yoyilmaga ega bo'lsin. Bu ikki yoyilmadan

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_m$$

hosil bo'ladi. Bu tenglikning chap tomonidan o'ng tomoniga qarab mulohaza yuritib, 3-teoremani qo'llasak, chap tomondagi biror-bir p_i tub son o'ng tomondagi biror-bir q_j tub songa bo'linadi. Bundan esa $p_i = q_j$ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki, a sonining tub sonlarga yoyilmasidagi ko'paytuvchilar orasida o'zaro tenglari ham bo'lishi mumkin. Faraz qilaylik, a sonining yoyilmasida p_i tub son α_i marotaba ishtirok etsin. U holda yoyilma a=$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ko'rinishga keladi. Bu yoyilmaga a sonining kanonik ko'rinishi deb ataladi.

Sonlarning kanonik yoyilmasi berilgan sonlarning EKUB va EKUKlarini topishda qo'llaniladi. Bizga a va b sonlarning kanonik shakllari berilgan bo'lsa,

a=$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$,

b=$p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$

u holda

$(a, b) = p_1^{\varphi_1} \cdot p_2^{\varphi_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\varphi_k}$ va $[a, b] = p_1^{\theta_1} \cdot p_2^{\theta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\theta_k}$

bo'lib, bu yerda $\varphi_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ va $\theta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.

1-M. 24 va 50 sonlarni EKUB va EKUK larini toping. Buning uchun ularning kanonik shaklga keltiramiz:

$24 = 2^3 \cdot 3,\ 50 = 2 \cdot 5^2$.

$\varphi_1 = \min(3,1) = 1$, $\varphi_2 = \min(1,0) = 0$, $\varphi_3 = \min(0,2) = 0$ bo'lib,

(24,50)= $2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 2$

bo‘ladi. Xuddi shunday

$\theta_1 = \max(3,1) = 3,\ \theta_2 = \max(1,0) = 1, \theta_3 = \max(0,2) = 2,$

bo'lib,

[24,50]= $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 = 600$

natijaga ega bo'lamiz.

Adabiyotlar:

1. Sh.A.Ayupov, B.A.Omirov,A.X.Xudoyberdiyev, F.H.Haydarov. Algebra va sonlar nazariyasi. Toshkent-2019 (62-67)
2. R.N.Nazarov, B.T.Toshpo'latov, A.D.Do'sumbetov. Algebra va sonlar nazariyasi. I qism. Toshkent-1993.(216-219)
3. **Karimov A.K., Mamatov M.M.** *Algebra va sonlar nazariyasidan masalalar to‘plami*
– Toshkent: “O‘qituvchi” nashriyoti, 2010.
4. **Qoriyev T., Hojayev A.** *Oliy matematika* – 1-qism. – Toshkent: Fan, 2014.
5. **Peskov V.A.** *Elementar matematika kursi: Sonlar nazariyasi* – Moskva: Prosveshcheniye, 1992.
6. **Buriboyev T.M., Saydaliyev A.M.** *Matematika asoslari* – Samarqand: SamDU nashriyoti, 2020.
7. **Niven, Ivan; Zuckerman, Herbert S.; Montgomery, Hugh L.** *An Introduction to the Theory of Numbers* – 5th Edition, John Wiley & Sons, 1991.
8. **Wikipedia (o‘zbek va inglizcha bo‘limlari):** https://uz.wikipedia.org/wiki/Tub_son https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_arithmetic .